Abstrakcyjna Charakteryzacja pr. L_p, $1 \le p < \infty$

Uwaga: Jeśli $x, y \in L_p(\mu)$ - rzeczywista pr. L_p, $1 \le p < \infty$

$x \wedge y = 0 \iff x, y \geq 0$ oraz x i y „żyją" na rozłącznych zbiorach, tzn.
$x \cdot y \overset{p.w.}{=} 0 \iff \{t : x(t) \neq 0\} \cap \{t : y(t) \neq 0\}$ zbiór miary zero

$$\Rightarrow \int_\Omega |x+y|^p \, d\mu = \int_{\{x \neq 0\} \cup \{y \neq 0\}} |x+y|^p \, d\mu =$$
$$= \int_{\{x \neq 0\}} |x|^p \, d\mu + \int_{\{y \neq 0\}} |y|^p \, d\mu$$

czyli $\|x+y\|_p^p = \|x\|_p^p + \|y\|_p^p$

Def: Abstrakcyjną rzeczywistą przestrzenią L_p, $1 \le p < \infty$ nazywamy kratę Banacha X, w której

$$\forall_{x, y \in X} \quad x \wedge y = 0 \Rightarrow \|x+y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$$

Tw. (1940 Bohnenblust, 1941 Kakutani)
X jest abstrakcyjną rzeczywistą pr. L_p $\iff$

$X \cong L_p(\mu)$ dla pewnej miary μ, tzn.

$\exists$ (Ω, Σ, μ) - przestrzeń z miarą

$\exists \; \Psi : X \to L_p(\mu)$ dodatni izometryczny izomorfizm liniowy (zachowuje porządek)

PRZYPADEK ZESPOLONY $\Rightarrow$ Kompleksyfikacja

Niech X rzeczywista przestrz. liniowa. Kompleksyfikacja pr. X to zespolona przestrzeń $X_{\mathbb{C}} = X \oplus X$, której elementy zapisujemy $x + iy$, gdzie $x, y \in X$,

$$(x+iy) + (u+iv) := (x+u) + i(y+v)$$

$$z \cdot (x+iy) := (ax - by) + i(bx + ay)$$

gdzie $z = a + ib$.

$\boxed{\text{Tw.}}$ Jeśli X rzeczywista krata Banacha, to wzór

$$\|x + iy\|_{\mathbb{C}} := \Big\| \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} (x \cos\theta + y \sin\theta) \Big\| \qquad (*)$$

supremum w sensie porządku na X

definiuje normę na $X_{\mathbb{C}}$, przy której $X_{\mathbb{C}}$ jest przestrzenią Banacha.

Def: Abstrakcyjną zespoloną przestrzenią L_p, $1 \le p < \infty$ nazywamy kompleksyfikację abstrakcyjnej rzeczywistej przestrzeni L_p z normą daną wzorem (*)

$\boxed{\text{Przykład}}$ Niech (Ω, Σ, μ) - prz. z miarą. Wtedy zespolona przestrzeń $L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$ jest abstrakcyjną prz. L_p (kompleksyfikacją rzeczywistej przestrzeni $L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$)

$f \in L_p^{\mathbb{C}}(\mu) \Rightarrow f = x + iy$ gdzie $\begin{matrix} x = \operatorname{Re} f \\ y = \operatorname{Im} f \end{matrix}$

oraz $x, y \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$, bo $\int |x|^p d\mu, \int |y|^p d\mu \leq \int \underbrace{|f|^p}_{= \left(\sqrt{|x|^2+|y|^2}\right)^p} d\mu < \infty$

Jeśli $x, y \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$ to $f := x + iy \in L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$, bo

$|f|^p \leq 2^{\frac{p}{2}} \max\{|x|^p, |y|^p\} \in L_1(\mu)$.

Zatem $(L_p^{\mathbb{R}}(\mu))_{\mathbb{C}} = L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$

Ponadto,

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |x\cos\theta + y\sin\theta| = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{= |x+iy|} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\theta + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\theta \right|$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \alpha^2 + \beta^2 = 1 & \\ \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \Rightarrow \exists_{\theta_0 \in [0, 2\pi]} & \alpha = \cos\theta_0, \ \beta = \sin\theta_0 \end{matrix} \right. =$$

$$= |x+iy| \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |\cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta|$$

$$= |x+iy| \underbrace{\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |\cos(\theta - \theta_0)|}_{= 1} = |x+iy|$$

$$= |x+iy| \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \cos(\theta-\theta_0) = |x+iy|$$

L_p

$$\|x+iy\|_{\mathbb{C}} = \| |x+iy| \|_p = \left(\int_\Omega |x+iy|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \|x+iy\|_p.$$

$\boxed{\text{WNIOSEK}}$

X jest abstrakcyjną zespoloną przestrzenią L_p $\Leftrightarrow$
$X \cong L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$ dla pewnej miary μ

Dowód: „$\Leftarrow$" powyższy przykład
„$\Rightarrow$" powyższy przykład + Bohnenblust, Kakutani. ∎

WARUNKOWA WARTOŚĆ OCZEKIWANA

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ całkowalna zmienna losowa na pr. probabilist. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tzn. $X \in L_1(P)$. Wtedy

$$E(X) := \int_\Omega X \, dP$$ – wartość oczekiwana zm. losowej X

$A \in \mathcal{F}$ – zdarzenie, $P(A) > 0$

$$E(X|A) := \frac{1}{P(A)} \int_A X \, dP = \int_\Omega X \, dP(\cdot|A)$$

↑ prawd. warunkowe

warunkowa wartość oczekiwana zm. X pod warunkiem zdarzenia $A \in \mathcal{F}$

warunkowe

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

JAK ZDEFINIOWAĆ WARUNKOWĄ WARTOŚĆ OCZEKIWANĄ (WWO) zm. losowej X pod warunkiem zm. los. Y ??

Niech $Y: \Omega \to \mathbb{R}$ dyskretna zm. losowa, tzn $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots\}$ przeliczalny zbiór oraz (możemy założyć, że) dla

$$A_i = Y^{-1}(y_i), \qquad i = 1, 2, 3, \dots$$
$$= \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y_i\}$$

mamy

$$P(A_i) > 0 \quad \text{oraz} \quad \Omega = \bigsqcup_{i=1,2,\dots} A_i \text{ — przeliczalne rozbicie } \Omega$$

Def. Niech Y jak wyżej (dyskretna zm. losowa) WWO X pod warunkiem $Y = y_i$ nazywamy liczbę

$$E(X | Y = y_i) := E(X | A_i) = \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X \, dP$$

WWO X pod warunkiem zm. los. Y nazywamy zm. losową $E(X|Y): \Omega \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$E(X|Y)(\omega) := E(X|Y=y_i), \text{ gdy } Y(\omega)=y_i$$

Czyli innymi słowy

$$E(X|Y) = \sum_{i=1,2,\dots} \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X\,dP \cdot \mathbb{1}_{A_i}$$

Uwaga 1 E(X|Y) zależy tylko od X oraz od rozbicia $\{A_i\}_{i=1,2,3,\dots}$ (nie zależy od wartości zm. Y),

a rozbicie $\{A_i\}_{i=1,2,\dots}$ można odtworzyć z σ-algebry

$$\mathcal{G} := \sigma^{-1}(Y) = \sigma(\{A_i\}_{i=1,2,\dots})$$

Czyli można napisać

$$E(X|\mathcal{G}) := E(X|Y)$$

WWO zm. los X pod warunkiem σ-algebry $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

Uwaga 2 Zmienna losowa $E(X|\mathcal{G})$ spełnia warunki

1) $E(X|\mathcal{G})$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna

2) $\forall_{A\in\mathcal{G}} \int_A E(X|\mathcal{G})\,dP = \int_A X\,dP$

Ponadto warunki 1), 2) wyznaczają $E(X|\mathcal{G})$ jednoznacznie p.w.

Def (Ogólna definicja WWO).

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ogólna przestrzeń z miarą i niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-podalgebra. Warunkowa wartością oczekiwaną $X \in L_1(\mu)$ pod warunkiem $\mathcal{G}$ nazywamy funkcję $E(X|\mathcal{G}) \in L_1(\mu)$ spełniającą

(W1) $E(X|\mathcal{G})$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna

(W2) $\forall_{A \in \mathcal{G}} \int_A E(X|\mathcal{G})\, d\mu = \int_A X\, d\mu$

WWO X pod warunkiem funkcji mierzalnej $Y: \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcję

$$E(X|Y) := E(X|\sigma(Y))$$

$$\boxed{\sigma(Y) = \{Y^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}}$$

$\boxed{\text{Tw.}}$ $E(X|\mathcal{G})$ jest wyznaczone jednoznacznie μ-p.w.

$E(X|\mathcal{G})$ istnieje o ile dla miary μ zachodzi Tw. Radona-Nikodyma, czyli np. gdy

1) μ miara skończona

2) μ – σ-skończona

3) μ – „lokalizowalna"

$\boxed{\text{Uwaga:}}$ Jeśli X jest $\mathcal{G}$-mierzalna, to

$$E(X|\mathcal{G}) = X$$

W szczególności

$$E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}) \quad \text{(idempotentność / własność rzutu)}$$

Czyli $E(\cdot|\mathcal{G}) : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ jest rzutem

z $L_1(\mu)$ na podprzestrzeń $L_1(\mu|\mathcal{G})$ – całkowalnych funkcji $\mathcal{G}$-mierzalnych, czyli

$$L_1(\mu|\mathcal{G}) = \{X \in L_1(\mu) : X \text{ jest } \mathcal{G}\text{-mierzalna}\}$$

$\boxed{\text{Tw}}$ Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-podalgebra, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ przestrzeń z miarą lokalizowalną. Wtedy wzór

$$E(X) := E(X|\mathcal{G})$$

definiuje liniowy rzut (idempotent, i.e. $E^2 = E$)

o normie 1:

$$E : L_1(\mu) \longrightarrow L_1(\mu|_{\mathcal{G}}) \subseteq L_1(\mu)$$

Ponadto

1) E jest dodatni: $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$

W szczególności $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

2) E jest wierny: $X \geq 0$ i $E(X) = 0 \Rightarrow X = 0$

3) E jest odwzorowaniem „$\mathcal{G}$-liniowym" - modułowym ze względu na funkcje $\mathcal{G}$-mierzalne

$$\left(\begin{array}{l} X, X \cdot Y \in L_1(\mu) \\ Y - \mathcal{G}\text{-mierzalna} \end{array}\right) \Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot Y$$

4) E jest ciągłe ze względu na zb. monotoniczną

$$\left(\begin{array}{l} \{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L_1(\mu) \\ X_n \nearrow X \in L_1(\mu) \end{array}\right) \Rightarrow E(X) = \lim_{n \to \infty} E(X_n)$$

(↑ punktowo, a więc i w $L_1(\mu)$)

Dowód:

„dodatniości" (W2) Jeśli $X \geq 0$, to dla $A \in \mathcal{G}$

$$\int_A E(X)\,d\mu = \int_A X\,d\mu \geq 0$$

oraz $E(X)$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna (na mocy (W1))

zatem $E(X) \geq 0$ μ-p.w.

„liniowość" $X, Y \in L_1(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Chcemy pokazać, że $\alpha E(X) + \beta E(\cancel{X})$ spełnia warunki (W1), (W2) dla $\alpha X + \beta Y$. Wtedy $\alpha E(X) + \beta E(Y) = E(\alpha X + \beta Y)$.

(W1) $\alpha E(X) + \beta E(Y)$ – $\mathcal{G}$-mierzalna jako kombinacja liniowa f. $\mathcal{G}$-mierzalnych

(W2) $\forall_{A \in \mathcal{G}}$ $\displaystyle\int_A \alpha E(X) + \beta E(Y)\,d\mu \underset{\text{liniowość całki}}{=} \alpha \int_A E(X)\,d\mu + \beta \int_A E(Y)\,d\mu$

$$\overset{\text{(W2) dla } X, Y}{=} \alpha \int_A X\,d\mu + \beta \int_A Y\,d\mu \overset{\Downarrow}{=} \int_A \alpha X + \beta Y\,d\mu.$$

„monotoniczność"

$$X \leq Y \Rightarrow Y - X \geq 0 \overset{\text{„dodatniość"}}{\Longrightarrow} E(Y-X) \geq 0$$

$$\overset{\text{„liniowość"}}{\Longrightarrow} E(Y) - E(X) \geq 0 \Leftrightarrow E(X) \leq E(Y)$$

„norma"

$$-|X| \leq X \leq |X| \overset{\text{monotoniczność}}{\Longrightarrow} -E(|X|) \leq E(X) \leq E(|X|)$$

Stąd $\boxed{|E(X)| \leq E(|X|)}$

Zatem

$$\|E(X)\|_1 = \int_\Omega |E(X)|\,d\mu \leq \int_\Omega E(|X|)\,d\mu \underset{\Omega\in\mathcal{G}}{\overset{(w2)}{=}} \int_\Omega |X|\,d\mu = \|X\|_1$$

Czyli $\|E\| \leq 1$ (E jest kontrakcją)

Jeśli $A \in \mathcal{G}$ t. że $0 < \mu(A) < \infty$, to $X = \frac{1}{\mu(A)} \mathbb{1}_A \in L_1(\mu)$, $\|X\|_1 = 1$ oraz

$E(X) = X$ bo X - $\mathcal{G}$-mierzalna. Stąd

$$\|E\| = 1.$$

„wierność" Jeśli $X \geq 0$ oraz $E(X) = 0$, to

$$\int_\Omega \underbrace{X}_{\geq 0}\,d\mu \underset{\Omega\in\mathcal{G}}{\overset{(w2)}{=}} \int_\Omega E(X)\,d\mu = \int_\Omega 0\,d\mu = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow X = 0$ μ-p.w. czyli $X = 0$ w $L_1(\mu)$

„$\mathcal{G}$-liniowość"

$X, X\cdot Y \in L_1(\mu)$, Y – $\mathcal{G}$-mierzalna. Zauważ, że

(W1) $E(X)\cdot Y$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna jako iloczyn funkcji $\mathcal{G}$-mierzalnych

Zatem potrzebujemy pokazać, że dla każdego $\boxed{B\in\mathcal{G}}$

(W2) $$\int_B X\cdot Y\, d\mu = \int_B E(X)\cdot Y\, d\mu \quad (*)$$

Wtedy $E(X)\cdot Y = E(X\cdot Y)$ z jednoznaczności (WW)

(1) Jeśli $Y = \mathbb{1}_A$, $\boxed{A\in\mathcal{G}}$, to

$$\int_B X\cdot Y\, d\mu = \int_{\underbrace{A\cap B}_{\in\mathcal{G}}} X\, d\mu \overset{(W2)}{=} \int_{A\cap B} E(X)\, d\mu =$$

$$= \int_B E(X)\,\mathbb{1}_A\, d\mu = \int_B E(X)\cdot Y\, d\mu$$

(2) Jeśli $Y = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$, $A_i\in\mathcal{G}$ funkcja prosta, to $(*)$ zachodzi na mocy liniowości całki i kroku (1)

(3) Jeśli $X, Y \geq 0$ nieujemne. Wtedy $\exists_{\{Y_n\}_{n=1}^\infty}$ $\mathcal{G}$-mierzalne funkcje proste takie, że $Y_n \nearrow Y$. Stąd również

$$X\cdot Y_n \nearrow X\cdot Y \quad \text{oraz} \quad E(X)\, Y_n \nearrow E(X)\cdot Y$$

$$\int_B X\cdot Y\,d\mu \overset{\text{Tw. o zbieżności monotonicznej}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_B X\cdot Y_n\,d\mu \;\overset{(*)\text{ zachodzi}}{\underset{\text{na mocy }(2)}{=}}\; \lim_{n\to\infty} \int_B \underbrace{E(X)}_{\geq 0 \text{ bo } X\geq 0} Y_n\,d\mu$$

$$\overset{\text{monotonicznej}}{=} \int_B E(X)\cdot Y\,d\mu.$$

(4) $X\geq 0$, Y - dow. ($\mathcal{G}$-mierzalna). Wtedy

$$\int_B X\cdot Y\,d\mu \overset{Y=Y^+-Y^-}{=} \int_B \underbrace{X}_{\geq 0}\cdot \underbrace{Y^+}_{\geq 0}\,d\mu - \int_B \underbrace{X}_{\geq 0}\cdot \underbrace{Y^-}_{\geq 0}\,d\mu \overset{(3)}{=}$$

$$= \int_B E(X)\,Y^+\,d\mu - \int_B E(X)\,Y^-\,d\mu =$$

$$\overset{Y=Y^+-Y^-}{=} \int_B E(X)\cdot Y\,d\mu$$

(5) X i Y dowolne

$$\int_B X\cdot Y\,d\mu \overset{X=X^+-X^-}{=} \int_B \underbrace{X^+}_{\geq 0}\cdot Y\,d\mu - \int_B \underbrace{X^-}_{\geq 0} Y\,d\mu \overset{(4)}{=}$$

$$= \int_B E(X^+)\,Y\,d\mu - \int E(X^-)\,Y\,d\mu$$

$$= \int_B [E(X^+) - E(X^-)]\cdot Y\,d\mu$$

$$= \int_B E(X)\,Y\,d\mu.$$

„monotoniczna ciągłość"

„monotoniczna ciągłość"

Zał: $X_n \nearrow X$. Wtedy $E(X_n) \leq E(X_{n+1})$ (bo E monotoniczne)

Czyli $\lim_{n\to\infty} E(X_n)$ istnieje i jest $\mathcal{G}$-mierzalna

Ponadto dla dow. $A \in \mathcal{G}$ mamy

$$\int_A \lim_{n\to\infty} E(X_n)\,d\mu \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} \int_A E(X_n)\,d\mu \overset{(W2)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_A X_n\,d\mu$$

Tw. o zb. monotonicznej

$$= \int_A X\,d\mu$$

Czyli $\lim_{n\to\infty} E(X_n)$ spełnia (W1) i (W2) dla $\mathcal{G}$ i X

Stąd $\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X)$ (punktowo)

De facto mamy

$$\| E(X) - E(X_n) \|_1 = \int_\Omega \underbrace{E(X) - E(X_n)}_{\geq 0}\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Tw. o zb. mon.}}$$

$$\longrightarrow \int_\Omega E(X) - E(X)\,d\mu = \int_\Omega 0\,d\mu = 0$$

$\blacksquare$